Ascending chain condition for F-pure thresholds

佐藤, 謙太

ASCENDING CHAIN CONDITION FOR F-PURE THRESHOLDS

佐藤 謙太

謝辞. 代数幾何学城崎シンポジウム 2017 において，講演の機会を与えて下さった，世話人の藤澤太郎先生，岡田拓三先生，佐野太郎先生に感謝を申し上げます.

導入

正標数の代数多様体上の因子やイデアルの特異点の悪さを数値的にはかる量として，F 純閾値 (F-pure threshold) が定義される (定義 1.9). 本稿では，この F 純閾値全体のなす集合が昇鎖条件 (ACC) という強い有限性を満たすという結果を紹介する.

1 章では，まず準備として，特異点に関する基本的な用語の定義を復習していく. 2 章では，主定理の背景である，標数 0 での双有理幾何における「lct の ACC」についての先行研究を紹介し，その後主定理 1 を述べる. 3 章では，主定理の証明の中で重要な役割を果たす，Ultraproduct について解説し，その後二つ目の主定理である主定理 2 を述べる. 4 章では，主定理 1 の証明のアイディアについて 5 つのステップに分けて論じる.

1. 特異点関連の定義

この章では，本稿で扱う特異点のクラスである，鋭 F 純，強 F 正則，log canonical, klt の定義を復習する.

1.1. 極小モデル理論に現れる特異点. まず，極小モデル理論に現れる種々の特異点の定義から復習する.

k を任意標数の代数閉体, (X, Δ) を k 上の対とする. つまり，X は k 上の正規代数多様体であり，Δ はその上の $\mathbb{R}$-因子であって $K_X + \Delta$ が $\mathbb{R}$-Cartier となるようなものとする. $f : Y \longrightarrow X$ を正規代数多様体 Y からの固有双有理射とした時，Y 上の $\mathbb{R}$-因子 Δ_Y を

$$\Delta_Y := f^*(K_X + \Delta) - K_Y$$

により定める. ただし，K_Y は，Y 上の標準因子であって，f が同型な部分では K_X と一致するように定めておく.

定義 1.1. 対 (X, Δ) が *kawamata log terminal* (以下 klt) (resp. *log canonical* lc)) であるとは，任意の正規代数多様体 Y と任意の固有双有理射 $f : Y \longrightarrow X$ について，Δ_Y のすべての係数が 1 未満 (resp. 1 以下) であることを言う.

定義から，klt ならば lc である. また，(X, Δ) の log resolution $g : Z \longrightarrow X$ を一つ固定した時，(X, Δ) が klt (resp. lc) であることと，Δ_Z の係数がすべて 1 未満 (resp. 以下) であることが同値であることが知られており (例えば [KM, Corollary 2.31 (3)])，特に X が正則の時，対 $(X, 0)$ は klt である.

k の標数を 0 としたとき，klt や lc といった特異点のクラスは，極小モデルプログラムを遂行する際に自然と現れるクラスであり，また一方で 小平型の消滅定理をはじめとする多くの良い性質を有しており，幾何的にも非常に重要な特異点である.

双有理幾何において重要なテクニックの一つに，因子の摂動がある. 与えられた klt 対 (X, Δ) に対し klt という性質を保ったままで Δ を少し大きくして種々の議論を行うという手法である. このような議論をする際に，特異点のクラスが保たれる閾値を考えるのは自然である.

定義 1.2. (X, Δ) を lc 対，$D \neq 0$ を X 上の有効 $\mathbb{R}$-Cartier 因子とする. この時，D の (X, Δ) における *log canonical threshold* $\mathrm{lct}(X, \Delta; D)$ が以下で定まる：

$$\mathrm{lct}(X, \Delta; D) := \sup\{t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \mid (X, \Delta + tD) \text{ は lc}\} \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

次に，log canonical threshold のイデアル版についても同様に定義する.

定義 1.3. (X,Δ) を代数閉体 k 上の対，$0\neq\mathfrak{a}\subseteq R$ をイデアル, $t\geqslant 0$ を実数とする．この時，三つ組 $(X,\Delta,\mathfrak{a}^t)$ が klt (resp. lc) であるとは，任意の固有双有理射 $f:Y\longrightarrow X$ であって，$\mathfrak{a}\cdot\mathcal{O}_Y=\mathcal{O}_Y(-F)$ となる Y 上の Cartier 因子 F が存在するようなものについて，Y 上の $\mathbb{R}$ 因子 Δ_Y+tF のすべての係数が 1 未満 (resp. 以下) となることを言う．

イデアルの場合も，klt や lc といった性質は一つの log resolution で調べれば十分である．なお，$\mathfrak{a}=0$ の時は，$(X,\Delta,\mathfrak{a}^t)$ は klt でも lc でもないと約束することにする．

定義 1.4. (X,Δ) を代数閉体 k 上の lc 対，$\mathfrak{a}\subsetneq R$ をイデアルとする．この時，$0\neq\mathfrak{a}\subseteq\mathcal{O}_X$ の (X,Δ) における log canonical threshold を

$$\mathrm{lct}(X,\Delta;\mathfrak{a}):=\sup\{t\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}\mid (X,\Delta,\mathfrak{a}^t)\text{ は lc}\}\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}.$$

により定める．

なお，(X,Δ) が lc でない場合や，$\mathfrak{a}=0$ の時は，$\mathrm{lct}(X,\Delta;\mathfrak{a})$ は 0 であると約束する．また，$\Delta=0$ の時，$\mathrm{lct}(X,0;\mathfrak{a})$ を単に $\mathrm{lct}(X;\mathfrak{a})$ とも書く．

注意 1.5. (X,Δ) を対とする．

(1) D が 0 でない有効 Cartier 因子の時，$\mathrm{lct}(X,\Delta;\mathcal{O}_X(-D))=\mathrm{lct}(X,\Delta;D)$ である．
(2) もし (X,Δ) が klt ならば，$\mathrm{lct}(X,\Delta;\mathfrak{a})=\sup\{t\geqslant 0\mid (X,\Delta,\mathfrak{a}^t)\text{ は klt}\}$. である．

1.2. **正標数の特異点．** 正標数において双有理幾何を行うことは非常に難しいため，フロベニウス写像を中心に理論を展開していくことが一般的である．特に，lc, klt, lct を考える代わりに，下で定義される「鋭 F 純」,「強 F 正則」, fpt といったフロベニウス写像により定義される概念で置き換えていくことで，良い理論が構築できることが多い．

R を等標数 $p>0$ の環，$F:R\longrightarrow R$ をフロベニウス写像 ($r\in R$ について，$F(r):=r^p$) とする．任意の R-加群 M と任意の自然数 $e\geqslant 0$ について，M に F^e を通して R 加群とみなしたものを F^e_*M とかく．$\mathbb{Z}$-加群としては $M=F^e_*M$ であるので，この対応によって $m\in M$ に対応する元を $F^e_*m\in F^e_*M$ と書く．R が **F-有限**とは，F が有限射となることである．

以下，R は常に等標数 $p>0$ の F-有限ネーター正規整域とする．

注意 1.6. F-有限という仮定は，多くの場合で成立している．実際，次の二つの場合には R は F-有限であることが簡単にわかる．

(1) R が完全体上本質的有限型の時
(2) R がネーター完備局所環でその剰余体が F-有限の時

定義 1.7 ([HW02], [Sch08])**.** Δ を $\operatorname{Spec}R$ 上の有効 $\mathbb{R}$-因子，$0\neq\mathfrak{a}\subseteq R$, $t\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ とする．

(1) $(R,\Delta,\mathfrak{a}^t)$ が鋭 F 純であるとは，ある自然数 $e\geqslant 1$ と, ある非 0 元 $a\in\mathfrak{a}^{\lceil t(p^e-1)\rceil}$ があって，R 加群としての単射

$$\begin{array}{rcl} R & \longrightarrow & F^e_*(R(\lceil (p^e-1)\Delta\rceil)) \\ r & \longmapsto & F^e_*(ar^{p^e}) \end{array}$$

が R-加群として分裂することをいう．

(2) (R,Δ) が強 F 正則であるとは，任意の元 $c\neq 0\in R$ に対し，ある自然数 $e\geqslant 1$ と，ある非 0 元 $a\in\mathfrak{a}^{\lceil t(p^e-1)\rceil}$ があって，R 加群としての単射

$$\begin{array}{rcl} R & \longrightarrow & F^e_*(R(\lceil (p^e-1)\Delta\rceil)) \\ r & \longmapsto & F^e_*(car^{p^e}) \end{array}$$

が R-加群として分裂することをいう．

$\mathfrak{a}=R$ かつ $t=0$ の時の三つ組 $(R,\Delta,\mathfrak{a}^t)$ のことを単に (R,Δ) と書く．更に $\Delta=0$ の時，単に「R が強 F 正則」や,「R が鋭 F 純」と呼ぶ．また，$\mathfrak{a}=0$ の時は常に強 F 正則でも鋭 F 純でもないと約束する．定義から，強 F 正則ならば鋭 F 純である．また，R が正則の時，R は強 F 正則であることが知られている．

klt と lc とはそれぞれ良い対応があると考えられている．たとえば次のような事実が知られている．

命題 1.8 ([HW02, Theorem 3.3], [Har98])**.** $(X=\operatorname{Spec}R,\Delta)$ を正標数の代数閉体 k 上の対とする．この時，次が成立．

(1) (X,Δ) が鋭 F 純ならば lc
(2) (X,Δ) が強 F 正則ならば klt
(3) $\dim X=2,\ \Delta=0,\ p>5$ であるならば，強 F 正則と klt は同値

また一般に，klt と強 F 正則は同値ではないが，mod p 還元の意味で対応していることが知られている ([Tak04])．lc と鋭 F 純についても、mod p 還元の意味で対応しているだろうと予想されている．その他にも，標数 0 で klt でない度合いをはかる「乗数イデアル」と呼ばれるイデアル層と，正標数で強 F 正則でない度合いをはかる「判定イデアル」(後述) の間にも良い類似性が知られている ([ST14]).

定義 1.9. (R,Δ) を鋭 F 純とし，$0\neq\mathfrak{a}\subsetneq R$ をイデアルとする．この時，$\mathfrak{a}$ の (R,Δ) における F 純閾値を

$$\operatorname{fpt}(R,\Delta;\mathfrak{a}):=\sup\{t\geqslant 0\mid (R,\Delta,\mathfrak{a}^t)\text{ は鋭 }F\text{ 純 }\}$$

により定める．

(R,Δ) が鋭 F 純でない時や $\mathfrak{a}=0$ の時は，fpt は 0 と約束する．また，(R,Δ) が強 F 正則の場合，$\operatorname{fpt}(R,\Delta;\mathfrak{a}):=\sup\{t\geqslant 0\mid (R,\Delta,\mathfrak{a}^t)$ は 強 F 正則 $\}$ である ([Sch08])．

最後に，混合版を考える．

定義 1.10. (R,Δ) を定義 1.7 の通りとして，$\mathfrak{a},\mathfrak{b}\subseteq R$ を非 0 イデアル，$s,t\geqslant 0$ を実数とする．$(R,\Delta,\mathfrak{a}^t\mathfrak{b}^s)$ が鋭 F 純であるとは，ある $e>0$, ある $a\in\mathfrak{a}^{\lceil t(p^e-1)\rceil}$ と，ある $b\in\mathfrak{b}^{\lceil s(p^e-1)\rceil}$ が存在して，単射

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & F^e_*(R(\lceil (p^e-1)\Delta\rceil)) \\ r & \longmapsto & F^e_*(abr^{p^e}) \end{array}$$

が R-加群として分裂することをいう．

強 F 正則の混合版も同様に定義できる．

1.3. **判定イデアル．** 強 F 正則でない度合いをはかるイデアルである判定イデアルを定義する．

命題-定義 1.11 ([Sch10, Theorem 6.3])**.** $(R,\Delta,\mathfrak{a}^t\mathfrak{b}^s)$ を定義 1.10 の通りとする．R のイデアル $J\subseteq R$ が $(R,\Delta,\mathfrak{a}^t\mathfrak{b}^s)$ に関して *F-compatible* であるとは，任意の自然数 $e\geqslant 0$ と任意の $\varphi\in\operatorname{Hom}_R(F^e_*(R(\lceil (p^e-1)\Delta\rceil)),R)$ について，$\varphi(F^e_*(J\mathfrak{a}^{\lceil t(p^e-1)\rceil}\mathfrak{b}^{\lceil s(p^e-1)\rceil}))\subseteq J$ となることとする．

この時，0 でない F-compatible イデアルの中で，包含関係について最小のイデアルが存在する．これを $(R,\Delta,\mathfrak{a}^t\mathfrak{b}^s)$ の**判定イデアル** (test ideal) と呼び，$\tau(R,\Delta,\mathfrak{a}^t\mathfrak{b}^s)$ と書く．

$\mathfrak{a}=0$ もしくは $\mathfrak{b}=0$ の時，判定イデアルは 0 イデアルと約束する．$\mathfrak{b}=R,\ s=0$ の時，$\tau(R,\Delta,\mathfrak{a}^t\mathfrak{b}^s)$ を $\tau(R,\Delta,\mathfrak{a}^t)$ と書く．

注意 1.12. $(R,\Delta,\mathfrak{a}^t)$ が強 F 正則であることと $\tau(R,\Delta,\mathfrak{a}^t)=R$ が同値である．特に，(R,Δ) が強 F 正則の時，$\operatorname{fpt}(R,\Delta;\mathfrak{a})=\sup\{t\geqslant 0\mid \tau(R,\Delta,\mathfrak{a}^t)=R\}$ である．

R が F 有限ネーター正規環とすると，R の標準因子 K_R が，dualizing complex を用いて定義される．(例えば [ST17, 2.2 節]) R 上の有効 $\mathbb{Q}$-因子 Δ が $K_R+\Delta$ を満たす時，(R,Δ) が *log $\mathbb{Q}$-Gorenstein* という (なお，この性質は dualizing complex や標準因子の取り方によらない．)

たとえば，R が正則の時は対 $(R,0)$ は log $\mathbb{Q}$-Gorenstein である．

命題 1.13 ([ST14])**.** $(R,\Delta,\mathfrak{a}^t)$ を定義 *1.7* の通りとする．更に，(R,Δ) は *log $\mathbb{Q}$-Gorenstein* と仮定する．この時次が成立する．

(1) 任意の $s>t$ について $\tau(R,\Delta,\mathfrak{a}^s)\subseteq\tau(R,\Delta,\mathfrak{a}^t)$.
(2) ある実数 $\varepsilon>0$ が存在して，任意の $t<s<t+\varepsilon$ について，$\tau(R,\Delta,\mathfrak{a}^s)=\tau(R,\Delta,\mathfrak{a}^t)$.
(3) もし，任意の $s<t$ について，$\tau(R,\Delta,\mathfrak{a}^s)\supsetneq\tau(R,\Delta,\mathfrak{a}^t)$ が成り立つとき，$t\in\mathbb{Q}$ である．

注意 1.14. 上の命題の (3) を満たすような t を $(R,\Delta;\mathfrak{a})$ の **F-跳躍数** (F-jumping number) と呼ぶ．注意 1.12 より，(R,Δ) が強 F 正則 log $\mathbb{Q}$-Gorenstein の時，$\operatorname{fpt}(R,\Delta;\mathfrak{a})$ は，$(R,\Delta;\mathfrak{a})$ の最小の F 跳躍数であり，特に有理数となる．

最後に，判定イデアルの基本的な性質のうち本稿で使われるものを挙げる．

簡単の為，R は完全体 k 上のべき級数環 $k[[x_1,\ldots,x_d]]$ とし，$\Delta=0$ とおく．この時，

$$F_*R \cong \otimes_\lambda R\cdot F_*(x^\lambda),$$

ただし，$\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_d)$ は $0\leqslant \lambda_i \leqslant p-1$ なる全ての $\lambda\in\mathbb{N}^d$ を走る．また，$x^\lambda := x_1^{\lambda_1}\ldots x_d^{\lambda_d}\in R$ とする．この時，R 加群準同型 $\mathrm{Tr}: F_*R\longrightarrow R$ を，$F_*(x_1^{p-1}\ldots x_d^{p-1})$ 成分への射影として定める．

命題 1.15. $R=k[[x_1,\ldots,x_d]]$, $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\subseteq R$ を非 0 イデアル，$s,t\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ とする．

(1) ([HT04]) $\mathfrak{a}$ の生成元の個数を l とする．$t\geqslant l$ ならば $\tau(R,\mathfrak{a}^t\mathfrak{b}^s)=\mathfrak{a}\tau(R,\mathfrak{a}^{t-1}\mathfrak{b}^s)$.
(2) ([ST14, Lemma 4.4 (b)])$\mathrm{Tr}(F_*(\tau(R,\mathfrak{a}^t\mathfrak{b}^s))=\tau(R,\mathfrak{a}^{t/p}\mathfrak{a}^{s/p})$.
(3) ([Tak06]) $\tau(R,(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^t)=\sum_{u,v\in\mathbb{R}_{\geqslant 0},u+v=t}\tau(R,\mathfrak{a}^u\mathfrak{b}^v)$.

2. 主結果

2.1. **標数 0 の先行研究．** log canonical threshold に関する非常に強い有限性を主張しているのが，以下の「lct の ACC」である．ここで，順序集合 $(I,\leqslant)$ が昇鎖条件 (ACC) を満たすとは，I 内の任意の上昇列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が，十分大きい n で常に $x_n=x_{n+1}$ を満たすことをいう．

定理 2.1 ([dFEM10])**.** 標数 0 の代数閉体 k を固定し，$n\geqslant 1$ を自然数とする．この時次の集合 $\mathrm{LCT}_n^{\mathrm{reg}}$ は ACC をみたす：

$$\mathrm{LCT}_n^{\mathrm{reg}} := \{\mathrm{lct}(X;\mathfrak{a}) \mid X \text{ は } n \text{ 次元非特異多様体}, \mathfrak{a}\subsetneq\mathcal{O}\}.$$

この定理は，もともと Shokurov ([Sho92]) によりその成立が予想され, 多くの著者により研究がなされてきた．

また，上述の定理が証明された後，Hacon, McKernan, Xu らによる大論文 [HMX14] の中で，より一般化された形でも ACC が成立することが示され，標数 0 における「lct の ACC」は完成形を迎えた．また，lct の ACC は，双有理幾何における種々の有限性と強く関係しており，幾何的にも非常に重要な定理である ([HMX14])．

2.2. **本稿の主定理．** Blickle, Mustaţă, Smith らによって，定理 2.1 の正標数化として次が予想された．

予想 2.2 ([BMS09])**.** k を正標数の代数閉体，$n\geqslant 1$ を自然数とする．この時次の集合 $\mathrm{FPT}_n^{\mathrm{reg}}$ は ACC を満たす：

$$\mathrm{FPT}_n^{\mathrm{reg}} := \{\mathrm{fpt}(R;\mathfrak{a}) \mid\ X=\mathrm{Spec}\,R \text{ は } k \text{ 上の } n \text{ 次元正則アフィン多様体}, \mathfrak{a}\subsetneq R\}.$$

fpt は lct と違い，双有理射のもとでうまくふるまわない．そのため，標数 0 とは全く異なるアプローチが必要となる．そのため，この予想は 2 次元の場合ですら未解決であった．

本稿における一つ目の定理は次である．

定理 2.3 ([Sat17, Theorem 1.2])**.** 上の予想は正しい

実際，fpt は環の局所化や完備化のもとでうまくふるまうので，上述の定理は次の主定理から従う．

主定理 1 ([Sat17, Main Theorem])**.** k を正標数の代数閉体，$n\geqslant 1$ を自然数，$R=k[[x_1,\ldots,x_n]]$ をべき級数環とする．この時，次の集合 $\mathrm{FPT}(R)$ は *ACC* を満たす：

$$\mathrm{FPT}(R) := \{\mathrm{fpt}(R;\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{a}\subsetneq R\}.$$

注意 2.4. 論文 [Sat17] では，もっと一般的な仮定，たとえば R に特異点を許した場合等も含めて同様の主張をしている．正確な主張及び証明は [Sat17] をご覧ください．

3. Ultraproduct について

この章では，主定理の証明で重要な役割を果たす ultraproduct について論じる．

3.1. **Ultraproduct の定義.**

定義 3.1. $\mathbb{N}$ のべき集合を $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ とする．$\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ が次の性質をすべて満たすとき，*non-principal ultrafilter* と呼ぶ.

(1) 任意の有限集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ について $A \notin \mathfrak{U}$.
(2) $A \in \mathfrak{U}$, $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$ ならば $B \in \mathfrak{U}$.
(3) $A, B \in \mathfrak{U}$ ならば $A \cap B \in \mathfrak{U}$.
(4) 任意の $A \subseteq \mathbb{N}$ について $A \in \mathfrak{U}$ もしくは $\mathbb{N} \setminus A \in \mathfrak{U}$.

Zorn の補題により，non-principal ultrafilter は存在する．以下このような $\mathfrak{U}$ を一つ固定する．

定義 3.2. $\{T_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ を集合の族とする．この時，直積集合 $\prod_m T_m$ に同値関係 $\sim_{\mathfrak{U}}$ が次で入る：

$$(a_m)_m \sim_{\mathfrak{U}} (b_m)_m \Leftrightarrow \{m \in \mathbb{N} \mid a_m = b_m\} \in \mathfrak{U}.$$

族 $\{T_m\}_m$ の *ultraproduct* $\mathrm{ulim}_m T_m$ を

$$\mathrm{ulim}_m T_m := (\prod_m T_m)/\sim_{\mathfrak{U}} .$$

により定義する．

$(a_m)_m \in \prod T_m$ の定めるクラスを $\mathrm{ulim}\, a_m \in \mathrm{ulim}_m T_m$ と書くことにする．各 $m \in \mathbb{N}$ で集合の写像 $f_m : T_m \longrightarrow S_m$ が与えられたとき，写像 $\mathrm{ulim}_m f_m : \mathrm{ulim}_m T_m \longrightarrow \mathrm{ulim}_m S_m$ が，$\mathrm{ulim}_m a_m \longmapsto \mathrm{ulim}_m f_m(a_m)$ により定まる．T を集合として，全ての m で $T_m := T$ とした時，$\mathrm{ulim}_m T_m$ のことを ${}^*T$ と書き，T の *ultrapower* と呼ぶ.

命題-定義 3.3 ([Gol98, Theorem 5.6.1])**.** $w = \mathrm{ulim}_m a_m \in {}^*\mathbb{R}$ が，$\sup_m a_m < \infty$ 及び $\inf_m a_m > -\infty$ を満たすと仮定する．この時，次を満たす実数 $w_0 \in \mathbb{R}$ がただ一つ存在する：

$$\text{任意の}\ \varepsilon > 0\ \text{について}\ \{m \in \mathbb{N} \mid |a_m - w_0| < \varepsilon\} \in \mathfrak{U}.$$

この w_0 を w の *shadow* と呼び，$\mathrm{sh}(w)$ とかく.

3.2. **Ultraproduct の代数構造.** ultraproduct は多くの代数構造を保つことが知られている．例えば次が簡単に確認できる．

命題 3.4. 全ての m で T_m が環 とすると，$\ker(\prod_m T_m \longrightarrow \mathrm{ulim}_m T_m)$ は直積環 $\prod_m T_m$ のイデアルであり，$\mathrm{ulim}_m T_m$ には $\prod_m T_m$ の剰余環として環構造が入る．更に，全ての m で T_m が体 *(resp.* 被約, 整域, 代数閉体，正規整域*)* とすると，$\mathrm{ulim}\, T_m$ もそうである.

各 m で R_m を環，M_m を R_m 加群とすると，$\mathrm{ulim}_m M_m$ は自然に $\mathrm{ulim}_m R_m$ 加群である．特に，$\mathfrak{a}_m \subseteq R_m$ に対し，$\mathrm{ulim}_m \mathfrak{a}_m$ は自然に $\mathrm{ulim}_m R_m$ のイデアルである．更に，$(R_m, \mathfrak{m}_m, k_m)$ が局所環の時，$(\mathrm{ulim}_m R_m, \mathrm{ulim}_m \mathfrak{m}_m, \mathrm{ulim}_m k_m)$ は再び局所環となる．

注意 3.5. ultraproduct は，多くの場合ネーター性は保たない．たとえば，$R = k[[x]]$ とした時，局所環 $({}^*R, {}^*\mathfrak{m}, {}^*k)$ を考えたとき，$\mathrm{ulim}_m(x^m) \in \cap_m({}^*\mathfrak{m})^m$ なので $\cap_m({}^*\mathfrak{m})^m \neq 0$ である．Krull の交差定理より ${}^*R$ はネーターでない.

定義 3.6. $(R, \mathfrak{m}, k)$ をネーター局所環とした時，その *catapower* を ${}^*R$ の剰余環

$$R_\# := {}^*R/(\cap_m({}^*\mathfrak{m}^m))$$

で定める．また，${}^*\mathfrak{m}$ の像を $\mathfrak{m}_\#$ と書く．$(R_\#, \mathfrak{m}_\#, {}^*k)$ は局所環である.

次の定理により，$R_\#$ はネーター環になる．

定理 3.7 ([Scho10, 8.1.19])**.** $(R, \mathfrak{m}, k)$ を等標数ネーター局所環として，$\widehat{R}$ の係数体 $k \longrightarrow \widehat{R}$ を固定する．この時，次の同型が成立する；

$$R_\# \cong \widehat{R}\ \widehat{\otimes}_k ({}^*k).$$

特に，$R_\#$ は完備ネーター局所環である.

$\mathrm{ulim}_m f_m \in {}^*R$ の像を $[f_m]_m \in R_\#$ と書く．また，イデアル $\mathrm{ulim}_m \mathfrak{a}_m \subseteq {}^*R$ 像を $[\mathfrak{a}_m]_m \subseteq R_\#$ と書く．

例 3.8. $R = k[[x_1, \dots, x_d]]$ とした時，$R_\# = ({}^*k)[[x_1, \dots, x_d]]$ である．各 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{N}^d$ について，$x^\lambda := x_1^{\lambda_1} \cdots x_d^{\lambda_d}$ とする．$f_m = \sum_{\lambda \in \mathbb{N}^d} a_{m,\lambda} x^\lambda \in R$ に対し，$[f_m]_m = \sum_{\lambda \in \mathbb{N}^d} [a_{m,\lambda}]_m x^\lambda \in R_\#$ である．

次の命題は定義から簡単に従うが，$R_\#$ でのイデアルに関する性質から，R の無限個のイデアルに関する一様な性質を導く際に重要な役割を果たす．

命題 3.9. $(R, \mathfrak{m}, k)$ をネーター局所環，$\mathfrak{a}_m, \mathfrak{b}_m \subseteq R$ をイデアルとする．もし $[\mathfrak{a}_m]_m \subseteq [\mathfrak{b}_m]_m \subseteq R_\#$ とすると，任意の自然数 n について

$$\{m \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{a}_m \subseteq \mathfrak{b}_m + \mathfrak{m}^n\} \in \mathfrak{U}.$$

3.3. 主定理 2.

主定理 2 ([BMS09], [Sat17, Theorem 1.5])**.** R を F 有限正則局所環，$\{\mathfrak{a}_m\}_m$ を R の真のイデアルの族とする．この時，

$$\mathrm{sh}(\mathrm{ulim}_m \mathrm{fpt}(R; \mathfrak{a}_m)) = \mathrm{fpt}(R_\#; \mathfrak{a}_\infty).$$

主定理 2 と命題 1.13 (3) を組み合わせると，ただちに次が得られる．

系 3.10. R, $\{\mathfrak{a}_m\}_m$ を主定理 *2* の通りとする．この時，もし $\lim_{m \longrightarrow \infty} \mathrm{fpt}(R; \mathfrak{a}_m)$ が存在するならば，それは有理数である．

この系は，主定理 1 の証明において重要な役割を果たす．

4. 証明のアイディア

この章では，主定理の証明のアイディアを述べる．以下，正標数の完全体 k と自然数 $d \geqslant 1$ を固定し，R は常にべき級数環 $k[[x_1, \dots, x_d]]$ とする．

4.1. 条件 A$\Rightarrow$ 主定理.

まず，主定理の証明で重要となる，条件 A を定義する．

定義 4.1. $\mathfrak{a} \subseteq R$ をイデアル，$t > 0$ を実数，$M \geqslant 1$ を自然数とする．$(\mathfrak{a}^t, M)$ が条件 A を満たすとは，$\mathrm{fpt}(R; \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^M) < t$ となることとする．

$\{\mathfrak{a}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ をイデアルの族とする．$(\{\mathfrak{a}_m\}_m^t, M)$ が条件 A を満たすとは，無限個の m で $(\mathfrak{a}_m^t, M)$ が条件 A を満たすこととする．

命題 4.2. $0 \neq \mathfrak{a} \subseteq R$ をイデアル，$t > 0$ を実数とする．この時次が成立．

(1) 任意のイデアル $\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a}$ について，$\mathrm{fpt}(R; \mathfrak{b}) \geqslant \mathrm{fpt}(R; \mathfrak{a})$．特に，もし $t \leqslant \mathrm{fpt}(R; \mathfrak{a})$ ならどんな M についても $(\mathfrak{a}^t, M)$ は条件 *A* を満たさない．
(2) $\mathrm{fpt}(R; \mathfrak{a}) = \lim_{M \longrightarrow \infty} \mathrm{fpt}(R; \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^M)$．特に，もし $\mathrm{fpt}(R; \mathfrak{a}) < t$ ならば，十分大きい M で常に $(\mathfrak{a}^t, M)$ は条件 *A* を満たす．

命題 4.3. 任意の自然数 $M > 0$ について，次の集合 $\mathrm{FPT}(R; \supseteq \mathfrak{m}^M)$ は ACC を満たす：

$$\mathrm{FPT}(R; \supseteq \mathfrak{m}^M) := \{\mathrm{fpt}(R; \mathfrak{b}) \mid \mathfrak{m}^M \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{m}\}.$$

Proof. 実際，[Sat17, Proposition 4.1] により，M のみに依存する自然数 N が存在して，$\mathrm{FPT}(R; \supseteq \mathfrak{m}^M) \subseteq (1/N)\mathbb{Z}$ であり，特に ACC を満たす． □

考察 4.4. イデアルの族に条件 A が成立することが，主定理を示唆することを説明する．

まず主定理を否定すると，イデアルの族 $\{\mathfrak{a}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ であって，列 $\{\mathrm{fpt}(R; \mathfrak{a}_m)\}$ が狭義上昇列となるようとれる．$t := \lim_{m \longrightarrow \infty} \mathrm{fpt}(R; \mathfrak{a}_m)$ とおく．この時，もしある自然数 $M > 0$ が存在して $(\{\mathfrak{a}_m\}_m^t, M)$ が条件 A を満たすと，矛盾が導かれる．実際，部分列で取り換え，任意の m で $\mathrm{fpt}(R; \mathfrak{a}_m + \mathfrak{m}^M) < t$ が成立としてよい．一方, 命題 4.2 (1) から，$\lim_m \mathrm{fpt}(R; \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^M) = t$ も成立する．しかしこれは，Prop 4.3 に矛盾である．

以上の考察により，与えられたイデアルの族に対して条件 A を成立させるような自然数 M をとれると，主定理が導かれる．このような一様的な議論を実現させるための手段として，再び catapower が登場する．

問題 4.5. 与えられた実数 $t > 0$ と R のイデアルの族 $\{\mathfrak{a}_m\}_m$ に対し，$\mathfrak{a}_\infty := [\mathfrak{a}_m]_m \subseteq R_\#$ を考える．もし，ある自然数 $M > 0$ に対し $(\mathfrak{a}_\infty^t, M)$ が条件 A を満たすならば，$(\{\mathfrak{a}_m\}_m^t, M)$ も条件 A を満たすか？

残念ながらこの問題の主張は正しくない．そこで以下の節では条件 A を，より catapower と相性の良い条件で置き換えていくことを目指す．具体的には，以下である．

(1) 4.2 節で，条件 B を定義し，条件 B $\Rightarrow$ 条件 A を示す．(命題 4.11).
(2) 4.3 節で，条件 C を定義し，条件 C $\Rightarrow$ 条件 B を示す．(命題 4.16).
(3) 4.4 節で，条件 D を定義し，「条件 D $\Rightarrow$ 条件 C」という主張に類似した命題 4.20 を示す．
(4) 4.5 節では，「$\mathfrak{a}_\infty = [\mathfrak{a}_m]_m$ で条件 D が成立すれば，無限個の m で条件 D が成立する」を少し弱めた命題 4.22 を示す．

残念ながら，「条件 D $\Rightarrow$ 条件 C」と「$\mathfrak{a}_\infty$ での条件 D $\Rightarrow$ 無限個の m での条件 D」は共に正しくない．(注意 4.21 4.23). [Sat17] での実際の証明においては，これらが成立するように，条件 D と条件 C の定義に技術的な修正を施すことで回避しているが，本稿ではこの部分には立ち入らないことにする．また，条件 D と条件 C の定義を修正したため，実際の証明を完成させるためには，それらに合わせる形で条件 A や条件 B の定義も修正が必要である．

修正後の正確な定義，主張，証明は [Sat17, 5 章] を参照ください．

4.2. **条件 B $\Rightarrow$ 条件 A.** 条件 A を引き起こす条件として，条件 B を定義したい．条件 B の鍵となるのは, 軸を足すことである．イデアル $\mathfrak{a} \subseteq R$ が与えられた時，$\mathrm{fpt}(R;\mathfrak{a})$ は，$t \longmapsto \tau(R,\mathfrak{a}^t)$ という対応により与えられる写像 $\mathbb{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathcal{P}(R)$ を見ることで現れる．条件 A を考える為にこの写像を拡張して，$(t,s) \longmapsto \tau(R,\mathfrak{a}^t\mathfrak{m}^s)$ により与えられる写像 $(\mathbb{R}_{\geqslant 0})^2 \longrightarrow \mathcal{P}(R)$ を考える．

定義 4.6. $\mathfrak{a},\mathfrak{b} \subseteq R$ をイデアルとする．この時，$(R;\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ の F **純領域** (F-pure region) $\mathrm{FPR}(R;\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \subseteq (\mathbb{R}_{\geqslant 0})^2$ を次で定義する：

$$\begin{aligned}\mathrm{FPR}(R;\mathfrak{a},\mathfrak{b}) &:= \mathrm{Cl}(\{(t,s) \in (\mathbb{R}_{\geqslant 0})^2 \mid (R,\mathfrak{a}^t\mathfrak{b}^s) \text{ は鋭 } F \text{ 純 }\}) \\ &= \mathrm{Cl}(\{(t,s) \in (\mathbb{R}_{\geqslant 0})^2 \mid \tau(R,\mathfrak{a}^t\mathfrak{b}^s) = R\}),\end{aligned}$$

ただし，Cl で，ユーグリッド位相に関する閉包を意味することとする．

例 4.7 ([Pér13, Example 5.3])**.** $R := \mathbb{F}_3[[x,y]]$, $\mathfrak{a} = (xy)$, $\mathfrak{b} = (x+y)$ とする．この時，$\mathrm{FPR}(R;\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ は図 1 のような領域となる (より詳細な図は [Pér13, Example 5.3] をご覧ください．)：

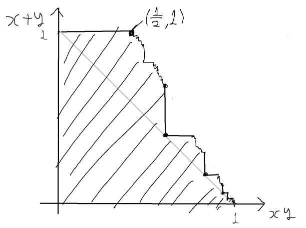


FIGURE 1

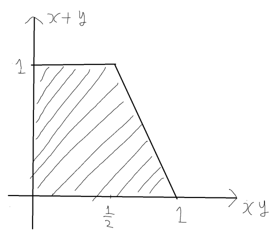


FIGURE 2

一方，$R_0 := \mathbb{C}[x,y]$, $\mathfrak{a} = (xy)$, $\mathfrak{b} = (x+y)$ について同様に *log canonical region* $\mathrm{LCR}(R;\mathfrak{a},\mathfrak{b}) := \{(t,s) \mid (R_0,\mathfrak{a}^t\mathfrak{b}^s) \text{ は lc}\}$ を考える．$X = \operatorname{Spec} R_0$ の原点での爆発により，$(X,\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ の log resolution が得られ，簡単な計算により $\mathrm{LCR}(R_0;\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \subseteq \mathbb{R}^2$ が図 2 のようになることがわかる．

注意 4.8. 上で定義した log canonical region $\mathrm{LCR}(R_0;\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ は，一般的には log canonical polytope と呼ばれ $\mathrm{LCT}(R_0;\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ と書かれることが多い．その名前が示唆する通り，LCR はいつでも rational polytope になる．これは loc canonical という性質 が一つの log resolution だけで確認可能であることに対応している．一方，上の例が示す通り，F 純領域は polytope にはならず，fractal のような複雑な図形になる．

定義 4.9. $\mathfrak{a} \subseteq R$ をイデアル，$M > 0$ を自然数とする．$(\mathfrak{a}^t, M)$ が条件 B を満たすとは次が成立することとする：$l \subseteq \mathbb{R}^2$ を，傾きが $-M$ で点 $(t, 0)$ を通る直線とした時，$l \cap \mathrm{FPR}(R; \mathfrak{a}, \mathfrak{m}) = \emptyset$.

例 4.10. 例 4.7 と同じく，$R_0 = \mathbb{C}[x, y], \mathfrak{a} = (xy), \mathfrak{b} = (x + y)$ とする．また実数 $t > 1$ を固定する．この時,t を通り傾きが -2 となる直線を l とすると $\mathrm{LCR}(R; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cap l = \emptyset$ とわかる．

$R = \mathbb{F}_3[[x, y]], \mathfrak{a} = (xy), \mathfrak{b} = (x + y)$ の場合は，図 1 のように，領域の境界が線分でない為，もう少し繊細な議論が必要となる．しかし、例えば次のようにすると，任意の $t > 1$ について, $(t, 0)$ を通り傾き $M = -3$ の直線は $\mathrm{FPR}(R; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ と交わらないことがわかる：

まず，全ての自然数 $n \geqslant 0$ について，直線 $y = -x + 1$ 上の点

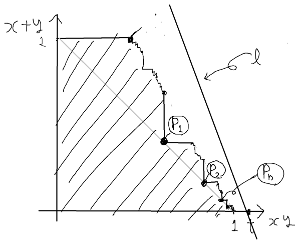
$$P_n := (\frac{3^n - 1}{3^n}, \frac{1}{3^n}) \in \mathbb{R}^2$$

を考える．[Pér13, Example 5.3] より，P_n は F 純領域の境界に位置しており，特に任意の与えられえた点 $Q \in \mathbb{R}^2$ について，もしある n が存在して $P_n \prec Q$ ならば $Q \notin \mathrm{FPR}(R; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ とわかる．ただしここで，任意の $P = (x, y), Q = (x', y')$ について，

$$P \prec Q \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} x < x' \text{ かつ } y < y'$$

と定義する．

今，任意の実数 $t > 1$ について，点 $(t, 0)$ を通り傾き -3 の直線を l とした時，$l \cap \mathbb{R}^2_{\geqslant 0}$ の任意の点 Q は，ある n について $P_n \prec Q$ を満たすので，$l \cap \mathrm{FPR}(R; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \emptyset$ である．



命題 4.11. $\mathfrak{a} \subseteq R$ をイデアル，$t > \mathrm{fpt}(R; \mathfrak{a})$ を実数，$M > 0$ を自然数とする．この時，$(\mathfrak{a}^t, M)$ で条件 B が成り立てば, $(\mathfrak{a}^t, M)$ は条件 A を満たす．

Proof. 正の実数 $\varepsilon > 0$ に対し，$l_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^2$ を，点 $(t - \varepsilon, 0)$ を通り傾き $-M$ の直線とする．条件 B と，$\mathrm{FPR}(R; \mathfrak{a}, \mathfrak{m})$ のコンパクト性から，ある実数 $\varepsilon > 0$ が存在して，$l_\varepsilon \cap \mathrm{FPR}(R; \mathfrak{a}, \mathfrak{m}) = \emptyset$ とできる．

一方，命題 1.15 (3) より，

$$\tau(R, (\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^M)^{t-\varepsilon}) = \sum_{u,v \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}, u+v=t-\varepsilon} \tau(R, \mathfrak{a}^u \mathfrak{m}^{Mv})$$

である．しかし，$u + v = t - \varepsilon$ となる任意の u, v に対し，点 $(u, Mv) \in \mathbb{R}^2_{\geqslant 0}$ は l_ε 上の点なので，$(u, Mv) \notin \mathrm{FPR}(R; \mathfrak{a}, \mathfrak{m})$. したがって $\tau(R, \mathfrak{a}^u \mathfrak{m}^{Mv}) \subseteq \mathfrak{m}$.

以上より，$\tau(R, (\mathfrak{a} + \mathfrak{m})^{t-\varepsilon}) \subseteq \mathfrak{m}$ であり，条件 A が成立． □

4.3. 条件 C ⇒ 条件 B.

考察 4.12. 一般に FPR の境界はフラクタル的な複雑さを持つが，例 4.10 の点列 $\{P_n\}$ のように，うまく直線的なふるまいを抽出することが条件 B の鍵である．

上の例の点 $P_n = (x_n, y_n)$ の x 座標 x_n は，1 の 3 進展開

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^i}$$

の $n + 1$ 桁目以降を切り捨てたものに他ならない．また，y 座標は

$$y_n = \mathrm{fpt}(R, \mathfrak{a}^{x_n}; \mathfrak{b}) := \inf\{y \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \mid \tau(R, \mathfrak{a}^{x_n} \mathfrak{b}^y) \neq R\}$$

であった．

この考察に基づいて条件 C を定義したい．まず q 進展開の定義から復習しよう．

定義 4.13. $t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$，　$q \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$, $n \in \mathbb{Z}$ とする．t の q 進展開に関連して，次の二つを定義する．

(1) $\langle t \rangle_{n,q} := \lceil tq^n - 1 \rceil / q^n \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$.

(2) $t^{(n,q)} = \lceil tq^n - 1 \rceil - q\lceil tq^{n-1} - 1 \rceil$.

q が固定されている時，それぞれ $\langle t \rangle_{n,}$ 及び $t^{(n)}$ とも書く．

次の簡単な補題が示す通り，$t^{(n)}$ は t の q 進展開の n 桁目を，$\langle t \rangle_{n,}$ は q 進展開の $n+1$ 項目以降を切り捨てたものである．

Lemma 4.14. t, q, n を上の通りとする．この時，次が成立する．

(1) $0 \leqslant t^{(n)} < q$.

(2) 任意の $n << 0$ で $t^{(n)} = 0$.

(3) $t = \sum_{m \in \mathbb{Z}} t^{(m)} q^{-m}$.

(4) $\langle t \rangle_{n,q} = \sum_{m \leqslant n} t^{(m)} q^{-m}$.

定義 4.15. $(\mathfrak{a}^t, q, N)$ が条件 C を満たすとは，任意の整数 $n \in \mathbb{Z}$ について 次の不等式が満たされることとする：

$$\mathrm{fpt}(R, \mathfrak{a}^{\langle t \rangle_{n+1,q}}; \mathfrak{m}) \geqslant \mathrm{fpt}(R, \mathfrak{a}^{\langle t \rangle_{n,q}}; \mathfrak{m}) - N/q^n$$

命題 4.16. $\mathfrak{a} \subseteq R$ をイデアル，$t > \mathrm{fpt}(R; \mathfrak{a})$ を有理数，$q \geqslant 2, N > 0$ を自然数とする．この時，もし $(\mathfrak{a}^t, q, N)$ が条件 C を満たすならば，t, q, N のみに依存する自然数 M が存在して，$(\mathfrak{a}^t, M)$ が条件 B を満たす.

Proof. $l_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ を，点 $(t, 0)$ を通る傾き $-N$ の直線とする．また，各整数 $n \in \mathbb{Z}$ について $P_n := (x_n, y_n) \in \mathrm{FPR}(R; \mathfrak{a}, \mathfrak{m})$ を

$$x_n := \langle t \rangle_{n,q},\ y_n := \mathrm{fpt}(R, \mathfrak{a}^{x_n}; \mathfrak{m})$$

により定める．また，$Q_n := (x_n, y'_n)$ を直線 l_0 と直線 $x = x_n$ の交点とする．

今，条件 C より任意の n で $y_n \leqslant y_{n+1} + N/q^n$ である．一方，$x_{n+1} < x_n + (1/q^n)$ に注意すると，$y'_{n+1} = y'_n - N(x_{n+1} - x_n) \leqslant y'_n - N/q^n$ である．

この時，任意の n について $y_n < y'_n$ (つまり，P_n は l_0 より左下に存在) である．実際，$t > \mathrm{fpt}(R; \mathfrak{a})$ なので十分大きい n について $y_n = 0$ なのでこの時 $y_n < y'_n$ である．更に，もし $y_{n+1} < y'_{n+1}$ ならば

$$y_n \leqslant y_{n+1} + N/q^n < y'_{n+1} + N/q^n \leqslant y'_n.$$

以上より帰納的に従う．

t が有理数であることに注意すると， 例 4.10 のように，点 $(t, 0)$ を通り傾きが負の直線 l であって，すべての $Q \in l \cap \mathbb{R}^2_{>0}$ に対し，ある n があって $Q_n \prec Q$ となるようとれる．この傾き $-M$ は，q と N と t のみに依存してとれる． □

4.4. **条件 D ⇒ 条件 C.** 上の節で定義した条件 C は条件 B と違って，n についての帰納法が運びやすい条件となっている．この帰納法の為に必要となる条件が今から定義する条件 D である．

定義 4.17. $(\mathfrak{a}^s, q, n_0)$ が条件 D を満たすとは，

$$\tau(R, \mathfrak{a}^{\langle s \rangle_{n_0,q}}) = \tau(R, \mathfrak{a}^{\langle s \rangle_{n_0+1,q}}).$$

が満たされることとする．

「F-跳躍数の離散性」という下記の性質により，$\mathfrak{a}, s, q$ を固定した時，十分大きい n_0 で常に条件 D は成立する．

命題 4.18 ([ST14])**.** 任意のイデアル $\mathfrak{a}$ と任意の実数 $s > 0$ について，ある $0 < s' < s$ が存在して，任意の実数 $s' < t < s$ について $\tau(R, \mathfrak{a}^t)$ は t によらず一定. 特に，十分大きい n について，常に

$$\tau(R, \mathfrak{a}^{\langle s \rangle_{n,q}}) = \tau(R, \mathfrak{a}^{\langle s \rangle_{n+1,q}}).$$

次に条件 D と条件 C の関係性について論じる．まず,「有理数は循環小数」という初等的な事実から復習しよう．

Lemma 4.19. p を素数，$t \in \mathbb{Q}_{>0}$ とすると次が成立.

(1) ある自然数 a, b があって，$p^a(p^b - 1)t \in \mathbb{Z}$

(2) ある自然数 $e > 0$ があって，$q = p^e$ とした時，$q(q-1)t \in \mathbb{Z}$.

(3) *(2)* の q について t の q 進展開の n 桁目 $t^{(n,q)}$ は任意の $n \geqslant 2$ で一定.

Proof. (1) ある自然数 $s, a > 0$ と，p と互いに素な自然数 $r > 0$ によって $t = s/(p^a r)$ とかける．有限群 $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^\times$ の位数を b とすると，$p^b \equiv 1 \pmod{r}$ とわかる．(2)$e := ab$ とするとよい．(3) ある自然数 s について $t = s/(q(q-1))$ と書ける．s を $q-1$ で割ることで，自然数 a, l であって，$s = a(q-1) + l$ と $1 \leqslant l \leqslant q-1$ が満たされる．この時，$t = (a/q) + (l/q(q-1))$ となり，この時任意の $n \geqslant 2$ で $t^{(n)} = l$ とわかる． □

命題 4.20. $t \in \mathbb{Q}_{>0}$ を有理数とし，$q = p^e$ を $q(q-1)t \in \mathbb{Z}$ となるよう固定する。$l := t^{(2)}$ として $s := ql/(q-1) \in \mathbb{Q}_{>0}$ とおく．$\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$ を単項イデアルとする．自然数 n_0 を $(\mathfrak{a}^s, q, n_0)$ が条件 D を満たすようとる．この時，q, n_0 のみに依存する自然数 N が存在し，任意の自然数 $n \geqslant n_0 + 2$ について，次の不等式が成立：

$$\mathrm{fpt}(R, \mathfrak{a}^{\langle t\rangle_{n+1,q}}; \mathfrak{b}) \geqslant \mathrm{fpt}(R, \mathfrak{a}^{\langle t\rangle_{n,q}}; \mathfrak{b}) - N/q^n.$$

Proof. $N := q^{n_0+1}$ が条件を満たすことを示す．各 n で，$y_n := \mathrm{fpt}(R, \mathfrak{a}^{\langle t\rangle_{n,q}}; \mathfrak{b}) \geqslant 0$，$y'_n := \lceil q^{n-n_0-1} y_n \rceil / q^{n-n_0-1}$ とおく．この時，$y_n \leqslant y'_n < y_n + (1/q^{n-n_0-1})$ である．特に，$\tau(R, \mathfrak{a}^{\langle t\rangle_{n,q}} \mathfrak{b}^{y'_n}) \subseteq \mathfrak{m}$ である．

s の定義より，

$$\alpha := q^{n-n_0} \langle t\rangle_{n,q} - \langle s\rangle_{n_0,q}$$

は自然数であり，更に

$$\alpha = q^{n-n_0} \langle t\rangle_{n+1,q} - \langle s\rangle_{n_0+1,q}$$

も満たしている．

この時，命題 1.15 (1), (2), 及び条件 D を使うと，

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m} &\supseteq \tau(R, \mathfrak{a}^{\langle t\rangle_{n+1,q}} \mathfrak{b}^{y'_{n+1}}) \\
&= \mathrm{Tr}^{e(n-n_0)}(F_*^{e(n-n_0)} \tau(R, \mathfrak{a}^{q^{n-n_0}\langle t\rangle_{n+1,q}} \mathfrak{b}^{q^{n-n_0} y'_{n+1}})) \\
&= \mathrm{Tr}^{e(n-n_0)}(F_*^{e(n-n_0)} \mathfrak{a}^{\alpha} \mathfrak{b}^{q^{n-n_0} y'_{n+1}} \tau(R, \mathfrak{a}^{\langle s\rangle_{n_0+1,q}})) \\
&= \mathrm{Tr}^{e(n-n_0)}(F_*^{e(n-n_0)} \mathfrak{a}^{\alpha} \mathfrak{b}^{q^{n-n_0} y'_{n+1}} \tau(R, \mathfrak{a}^{\langle s\rangle_{n_0,q}})) \\
&= \mathrm{Tr}^{e(n-n_0)}(F_*^{e(n-n_0)} \tau(R, \mathfrak{a}^{q^{n-n_0}\langle t\rangle_{n,q}} \mathfrak{b}^{q^{n-n_0} y'_{n+1}})) \\
&= \tau(R, \mathfrak{a}^{\langle t\rangle_{n,q}} \mathfrak{b}^{y'_{n+1}}).
\end{aligned}$$

したがって，$y_n \leqslant y'_{n+1} \leqslant y_{n+1} + N/q^n$. □

注意 4.21. この証明の中で，$\mathfrak{b}$ が単項イデアルという仮定は外すことができない．一方，条件 C を導くためには $\mathfrak{b}$ の部分に $\mathfrak{m}$ を入れる必要である為，上の命題からただちに「条件 D $\Rightarrow$ 条件 C」が言えるわけではない．実際，[Sat17] では上の命題と類似の証明が運ぶように，条件 C と条件 D の定義に技術的な修正を施した．

4.5. **$\mathfrak{a}_\infty \subseteq R_\#$ に対する条件 D $\Rightarrow$ イデアルの族 $\{\mathfrak{a}_m\}_m$ に対する条件 D.** 最後に，条件 D と Catapower の可換性について考える．

命題 4.22. $s > 0$ を実数，$n_0 > 0$ を自然数，また各自然数 m について，$\mathfrak{a}_m \subseteq R$ を単項イデアルとする．更に $\mathfrak{a}_\infty := [\mathfrak{a}_m]_m \subseteq R_\#$ とする．この時，もし $(\mathfrak{a}_\infty^s, q, n_0)$ が条件 D を満たすならば，各自然数 $a > 0$ に対し，無限集合 $T_a \subseteq \mathbb{N}$ が存在し，任意の $m \in T_a$ について次が成立：

$$\tau(R, \mathfrak{a}^{\langle s\rangle_{n_0,q}}) \subseteq \tau(R, \mathfrak{a}^{\langle s\rangle_{n_0+1,q}}) + \mathfrak{m}^a.$$

Proof. 命題 1.15 (2) と [Sat17, Proposition 2.10 (5)] により，全ての自然数 n で

$$\begin{aligned}
\tau(R_\#, \mathfrak{a}_\infty^{\langle s\rangle_{n,q}}) &= \mathrm{Tr}^{en}(F_*^{en} \mathfrak{a}_\infty^{\lceil sq^n - 1\rceil}) \\
&= [\mathrm{Tr}^{en}(F_*^{en} \mathfrak{a}_m^{\lceil sq^n - 1\rceil})]_m \\
&= [\tau(R, \mathfrak{a}_m^{\langle s\rangle_{n,q}})]_m \subseteq R_\#
\end{aligned}$$

であるに注意すると，命題 3.9 から従う． □

注意 4.23. 上の命題に現れるイデアルの包含関係は，条件 D より弱い．そのため，「$\mathfrak{a}_\infty$ での条件 D ⇒ 族 $\{\mathfrak{a}_m\}_m$ での条件 D」が示されたわけではない．この implication を成立させるためには，条件 D の定義を再び少し修正する必要がある．

References

[BMS09] M. Blickle, M. Mustaţă and K. E. Smith, F-thresholds of hypersurfaces, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), no. 12, 6549-6565.

[dFEM10] T. de Fernex, L. Ein and M. Mustaţă, Shokurov's ACC conjecture for log canonical thresholds on smooth varieties, Duke Math. J. **152** (2010), no. 1, 93–114.

[Gol98] R. Goldblatt, *Lectures on the hyperreals*, An introduction to nonstandard analysis. Graduate Texts in Mathematics **188**, Springer-Verlag, New York, 1998.

[Har98] N. Hara, Classification of two-dimensional F-regular and F-pure singularities, Adv. Math. **133** (1998), 33–53.

[HMX14] C. D. Hacon, J. McKernan and C. Xu. ACC for log canonical thresholds, Ann. of Math. **180** (2014) no. 2, 523–571.

[HT04] N. Hara and S. Takagi, On a generalization of test ideals, Nagoya Math. J. **175** (2004), 59–74.

[HW02] N. Hara and K.-i. Watanabe, F-regular and F-pure rings vs. log terminal and log canonical singularities, J. Alg. Geom. **11** (2002), 363–392.

[KM] J. Kollár and S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Vol. 134. Cambridge university press, 2008.

[Pér13] F. Pérez, On the constancy regions for mixed test ideals, J. Algebra **396** (2013), 82-97.

[Sat17] K. Sato, Ascending chain condition for F-pure thresholds on a fixed strongly F-regular germ, arXiv:1710.05331, preprint (2017).

[Scho10] H. Schoutens, *The use of ultraproducts in commutative algebra*, Lecture Notes in Mathematics **1999**, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[Sch08] K. Schwede, Generalized test ideals, sharp F-purity, and sharp test elements, Mathematical Research Letters **15.6** (2008), 1251–1261.

[Sch10] K. Schwede, Centers of F-purity, Math. Z. **265** (2010), no. 3, 687–714.

[Sho92] V. Shokurov, Three-dimensional log perestroikas, With an appendix by Yujiro Kawamata, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **56** (1992) no. 1, 105-203.

[ST14] K. Schwede and K. Tucker, Test ideals of non-principal ideals: Computations, Jumping Numbers, Alterations and Division Theorems, J. Math. Pures. Appl. **102** (2014), no. 05, 891–929.

[ST17] K. Sato and S. Takagi, General hyperplane sections of threefolds in positive characteristic, arXiv:1703.00770, preprint (2017).

[Tak04] S. Takagi, An interpretation of multiplier ideals via tight closure, Journal of Algebraic Geometry **13.2** (2004), 393–415.

[Tak06] S. Takagi, Formulas for multiplier ideals on singular varieties, Amer. J. Math. **128** (2006) no. 6, 1345–1362.

東京大学数理科学研究科博士二年

E-mail address: ktsato@ms.u-tokyo.ac.jp